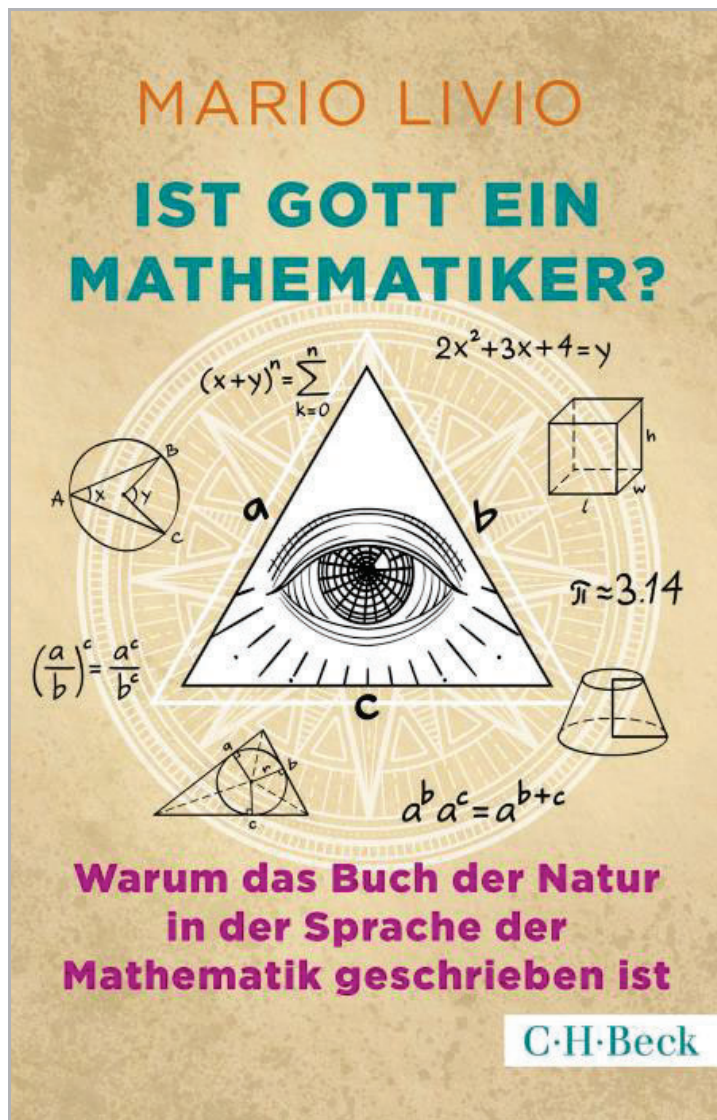


Unverkäufliche Leseprobe



Mario Livio
Ist Gott ein Mathematiker?

Warum das Buch der Natur in der Sprache der
Mathematik geschrieben ist

2023. 366 S., mit 64 Abbildungen
ISBN 978-3-406-80756-5

Weitere Informationen finden Sie hier:
<https://www.chbeck.de/35537169>

C·H·Beck

PAPERBACK

Von der Antike bis in unsere Tage haben sich Wissenschaftler und Philosophen darüber gewundert, dass eine so abstrakte Disziplin wie die Mathematik die Natur derart perfekt erklären kann. Das Staunen darüber bildet den roten Faden, an dem der Astrophysiker Mario Livio mit großer Lebendigkeit durch die Geistesgeschichte des mathematischen und naturwissenschaftlichen Denkens führt.

«Freundlicherweise wird die Natur von allgemeingültigen Gesetzen und nicht von Feld-, Wald- und Wiesen-Regeln mit beschränkter Reichweite gelenkt.» Mario Livio

Mario Livio, geboren in Rumänien und aufgewachsen in Israel, ist Astrophysiker am Hubble Space Telescope Science Institute in Baltimore. Er ist Autor zahlreicher erfolgreicher populärwissenschaftlicher Bücher, darunter «Der goldene Schnitt», «Die unlösbare Gleichung» und «Das beschleunigte Universum».

Mario Livio

Ist

GOTT

ein

MATHEMATIKER?

*Warum das Buch der Natur in der Sprache
der Mathematik geschrieben ist*

Aus dem Englischen von
Susanne Kuhlmann-Krieg

C.H.Beck

Titel der englischen Originalausgabe: «Is God a Mathematician?»

Copyright © 2009 by Mario Livio

Zuerst erschienen 2009 bei Simon & Schuster, Inc., New York

Die deutsche Ausgabe dieses Buches erschien zuerst 2010
in gebundener Form im Verlag C.H.Beck.

Von 2013 bis 2020 erschien die deutsche Ausgabe in 7 Auflagen
bei dtv Verlagsgesellschaft.

Mit 64 Abbildungen

1., durchgesehene Auflage in C.H.Beck Paperback. 2023

Für die deutsche Ausgabe:

© Verlag C.H.Beck oHG, München 2010

www.chbeck.de

Satz: Janß GmbH, Pfungstadt

Druck und Bindung: Druckerei C.H.Beck, Nördlingen

Umschlaggestaltung: Kunst oder Reklame, München

Printed in Germany

ISBN 978 3 406 80756 5



klimateutral produziert

www.chbeck.de/nachhaltig

Für Sofie

INHALT

1. Ein Mysterium
9
2. Mystiker:
Der Numerologe und der Philosoph
25
3. Magier:
Der Meister und der Ketzer
57
4. Magier:
Der Skeptiker und der Riese
109
5. Statistiker und Wahrscheinlichkeitstheoretiker:
Die Wissenschaft von der Ungewissheit
147
6. Der Zukunftsschock der Geometer
185
7. Logiker:
Nachdenken über das Denken
211
8. Unbegreifliche Erklärungsmacht?
247
9. Der menschliche Geist,
die Mathematik und das Universum
275

Anhang

Danksagung

311

Anmerkungen

313

Bibliographie

337

Bildnachweis

359

Personenregister

361

EIN MYSTERIUM

Vor einigen Jahren hatte ich eine Vorlesung an der Cornell University zu halten. Auf einer meiner PowerPoint-Folien prangte die Frage: «Ist Gott ein Mathematiker?» Kaum erschien sie auf der Leinwand, hörte ich einen Studenten in der ersten Reihe nach Luft schnappen: «Gott, ich hoffe nicht!»

Nun sollte meine rhetorische Frage aber weder meinen Zuhörern eine philosophische Definition von Gott aufnötigen, noch hatte ich vor, auf hinterhältige Weise Leute zu düpieren, die sich vor der Mathematik fürchten. Ich wollte lediglich die Sprache auf ein Mysterium bringen, das die Jahrhunderte hindurch einige der hellsten Köpfe beschäftigt hat – die offenkundige Allgegenwart und Allmacht der Mathematik. Beides sind Eigenschaften, die man in aller Regel mit einer Gottheit assoziiert, wie der britische Physiker James Jeans (1877–1946) einst sinnierte: «Das Universum scheint von einem Vollblutmathematiker entworfen.» Nicht nur zur Beschreibung und Erklärung des Kosmos im Großen, sondern auch im Zusammenhang mit den chaotischsten Unterfangen des Menschen scheint die Mathematik in beinahe übernatürlicher Weise tauglich zu sein.

Ob nun Physiker darangehen, Theorien des Universums zu formulieren, Marktanalysten sich den Kopf darüber zerbrechen, wann der nächste Börsenkrach zu erwarten ist, Neurobiologen Modelle für die Funktion von Gehirn und Nervensystem entwerfen oder Statistiker des militärischen Geheimdienstes Betriebsmittelzuweisungen zu optimieren versuchen – sie alle bedienen sich der Mathematik. Damit nicht genug, bedienen sie sich, auch wenn sie Formeln und Gesetze anwenden, die in verschiedenen Zweigen der Mathematik entwickelt wurden, doch alle derselben, auf der ganzen Welt einheitlichen Ma-

1. Ein Mysterium

thematik. Was ist es, das der Mathematik solch unglaubliche Macht verleiht? Oder, wie Einstein sich einst fragte: «Wie ist es möglich, dass die Mathematik, die doch ein *von aller Erfahrung unabhängiges* [die Kursivierung ist von mir] Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Welt so vortrefflich passt?»

Derlei andächtiges Staunen ist nicht neu. Einige der Philosophen des antiken Griechenlands – allen voran Pythagoras und Platon – waren bereits voller Ehrfurcht für die der Mathematik augenscheinlich innewohnende Fähigkeit, das Universum nach ihren Regeln zu formen und zu lenken, obwohl sie offenbar jenseits aller menschlichen Macht, sie zu ändern, zu bestimmen oder zu beeinflussen, existiert. Der politische Philosoph Thomas Hobbes (1588–1679) aus England konnte seine Bewunderung ebenfalls nicht verbergen. In seinem *Leviathan*, Hobbes' ungemein eindrucksvollem Werk über das, was er als Grundlagen einer Gesellschaft und ihrer Regierung betrachtet, führt er die Geometrie als Lehrbeispiel für rationales Argumentieren an:

Weil nur die Wahrheit in der richtigen Zusammensetzung der Worte, womit wir etwas bejahen wollen, besteht, so muß der Wahrheitsfreund sich der Bedeutung seiner jeweiligen Worte bewusst sein und sie regelmäßig ordnen; sonst wird er sich ebenso verwickeln wie ein Vogel, der sich auf der Leimrute desto fester anklebt, je emsiger er sich davon losmachen will. Deshalb macht man in der Geometrie, die vielleicht die einzige gründliche Wissenschaft ist, den Anfang des Unterrichts damit, daß man die Bedeutung der dabei zu gebrauchenden Wörter genau bestimmt, das heißt mit anderen Worten: man schickt eine Definition voran.

Jahrtausende hochkarätiger mathematischer Forschungen und gelehrter philosophischer Spekulationen haben relativ wenig Licht in die rätselhaft allumfassende Erklärungsmacht von Mathematik zu bringen vermocht. Das Geheimnis ist eher noch ein Stück undurchdringlicher geworden. Der renommierte Mathematiker und Physiker Roger Penrose aus Oxford beispielsweise sieht darin inzwischen nicht mehr nur ein einfaches, sondern vielmehr ein dreifaches Mysterium. Penrose unterscheidet drei verschiedene «Welten»: die Welt unserer bewussten Wahrnehmung, die physikalische Welt und eine platonische Welt der

1. Ein Mysterium

mathematischen Formen. Die erste Welt ist die Heimat all unserer mentalen Bilder – wie wir die Gesichter unserer Kinder wahrnehmen, einen atemberaubenden Sonnenuntergang empfinden oder auf die entsetzlichen Bilder eines Krieges reagieren. Dies ist auch die Welt, in der Liebe, Eifersucht und Vorurteile ihren Sitz haben, ebenso unsere Wahrnehmung von Musik, des Geruchs von Essen und von Angst. Die zweite Welt ist jene, die wir normalerweise als physikalische Realität betrachten. Real vorhandene Blumen, Aspirin-Tabletten, weiße Wolken und Düsenflugzeuge haben ihren Platz in dieser Welt, dazu Galaxien, Planeten, Atome, Pavianherzen und menschliche Gehirne. Die platonische Welt der mathematischen Formen, die nach Penrose eine eigene, der physikalischen und mentalen Welt vergleichbare Realität besitzt, ist das Mutterland der Mathematik. Sie ist der Ort, an dem Sie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... antreffen, dazu all die Formen und Lehrsätze der euklidischen Geometrie, Newtons Bewegungsgesetze, die String- und die Katastrophentheorie sowie mathematische Modelle zur Beschreibung des Aktienmarktverhaltens. Und nun, so Penrose, kommen die drei Mysterien: Erstens: Die physikalische Welt scheint Gesetzen zu gehorchen, die eigentlich in der Welt der mathematischen Formen beheimatet sind. Das deckt sich mit dem, was schon Einstein so erstaunt hatte. Der Nobelpreisträger für Physik Eugene Wigner (1902–1995) war darüber nicht minder verblüfft:

Dass die mathematische Sprache in so wunderbarer Weise zur Formulierung von Gesetzen der Physik taugt, ist ein wunderbares Geschenk, das wir weder verstehen noch verdienen. Wir sollten dankbar dafür sein und hoffen, dass es uns auch für künftige Forschungen erhalten bleibt und dass es sich – auf Gedeih und Verderb, zu unserer Freude, ja, vielleicht auch zu unserem Erstaunen – auf viele Zweige des Lernens ausweiten wird.

Zweitens, das wahrnehmende Ich selbst – unser Geist, Sitz unserer bewussten Wahrnehmungen – hat es irgendwie fertiggebracht, der physikalischen Welt zu entfliehen. Wie entstand der *Geist* wirklich aus *Materie*? Ob wir je in der Lage sein werden, eine Theorie der Funktionsweise von Bewusstsein zu entwickeln, die so schlüssig und über-

1. Ein Mysterium

zeugend ist wie, sagen wir, unsere gegenwärtige Theorie des Elektromagnetismus? Am Ende schließt sich der Kreis auf wundersame Weise, denn das wahrnehmende Bewusstsein ist aus geheimnisvollen Gründen imstande, Zugang zur mathematischen Welt zu erlangen, indem es einen Schatz an abstrakten mathematischen Formen und Konzepten entdeckt oder schafft und formuliert.

Penrose bietet für keines der drei Mysterien eine Erklärung, sondern stellt vielmehr lakonisch fest: «Es besteht kein Zweifel, dass es nicht drei Welten gibt, sondern nur *eine*, deren wahrhafte Beschaffenheit wir jedoch zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht einmal erahnen können.» Ein Zugeständnis übrigens, das von deutlich mehr Bescheidenheit zeugt als die Antwort des Lehrers in Alan Bennetts Theaterstück *Forty Years On* auf eine ziemlich ähnliche Frage:

Foster: Ich habe immer noch eine etwas vage Vorstellung von der Dreifaltigkeit.

Lehrer: Drei in eins, eins in drei, ganz einfach. Wenn Sie irgendwelche Probleme damit haben, fragen Sie Ihren Mathelehrer.

Das Rätsel ist sogar noch ein bisschen vertrackter, als ich es eben dargestellt habe. Der große Erfolg der Mathematik bei der Erklärung der Welt um uns herum (ein Erfolg, den Wigner als geradezu «unbegreifliche Effizienz oder Erklärungsmacht der Mathematik» bezeichnet hatte) hat genau genommen zwei Seiten, eine erstaunlicher als die andere. Zuerst ist da ein Aspekt, den man als «den aktiven» bezeichnen könnte. Wenn Physiker durch das schummrige Labyrinth der Natur streifen, leuchten sie ihren Weg mit Hilfe der Mathematik aus – die Instrumente, die sie entwickeln und verwenden, die Modelle, die sie konstruieren, und die Erklärungen, die sie ersinnen, sie alle sind ihrem Wesen nach mathematischer Natur. Das ist offenkundig bereits ein Wunder für sich. Newton betrachtete einen fallenden Apfel, den Mond und die Gezeiten am Strand (bei denen ich mir übrigens nicht ganz sicher bin, dass er sie überhaupt zu sehen bekommen hat!) – keine Spur von mathematischen Gleichungen –, und trotzdem war er irgendwie imstande, aus all diesen natürlichen Phänomenen klare, schlüssige und unglaublich genaue mathematische Gesetze für das

1. Ein Mysterium

Wirken der Natur herzuleiten. Ganz ähnlich brauchte der schottische Physiker James Clark Maxwell (1831–1879) nur vier mathematische Gleichungen, als er das System der klassischen Physik auf *alle* in den Sechzigerjahren des 19. Jahrhunderts bekannten elektrischen und magnetischen Phänomene ausweitete. Lassen Sie sich das einen Augenblick lang auf der Zunge zergehen. Die Erklärung einer langen Reihe von Versuchsergebnissen zu Licht und Elektromagnetismus, die zu beschreiben zuvor Bände in Anspruch genommen hatte, wurde auf vier prägnante Formeln reduziert. Einsteins allgemeine Relativitätstheorie ist, was das betrifft, sogar noch erstaunlicher – sie ist das perfekte Beispiel für eine außerordentlich präzise, in sich stimmige mathematische Theorie für etwas so Fundamentales wie die Struktur von Raum und Zeit.

Aber es gibt, was die aberwitzige Tauglichkeit der Mathematik anbelangt, auch eine «passive» Seite, und diese ist derart überraschend, dass der «aktive» Aspekt im Vergleich dazu schier verblasst. Von Mathematikern zu reinem Selbstzweck – ohne irgendwelche Anwendungen im Hinterkopf – ersonnenen Prinzipien und Zusammenhänge erwiesen sich Jahrzehnte (in manchen Fällen Jahrhunderte) später völlig unerwartet als Lösung für Probleme der physikalischen Realität! Wie ist das möglich? Betrachten wir zum Beispiel den recht amüsanten Fall des exzentrischen britischen Mathematikers Godfrey Harold Hardy (1877–1947). Hardy war derart stolz auf die Tatsache, dass seine Arbeit nichts weiter sei als reine, absolut zweckfreie Mathematik, dass er mit großem Nachdruck erklärte: «Keine Entdeckung von mir hat, direkt oder indirekt, zum Guten oder Schlechten, das allgemeine Wohlbefinden der Welt auch nur in geringster Weise beeinflusst oder wird dies vermutlich jemals tun!» Stellen Sie sich vor: Er hatte unrecht! Eine seiner Arbeiten feierte Auferstehung im Hardy-Weinberg-Gesetz (benannt nach Hardy selbst sowie dem deutschen Arzt Wilhelm Weinberg [1862–1937]), einem fundamentalen Prinzip, mit dessen Hilfe Genetiker die Evolution von Populationen untersuchen. Einfach ausgedrückt, besagt das Hardy-Weinberg-Gesetz, dass in einer hinreichend großen Population, in der sich alle Angehörigen nach dem Zufallsprinzip paaren können (und in der Migration, Mutation und Selektion nicht stattfinden), die genetische

1. Ein Mysterium

Beschaffenheit der Population von einer Generation zur nächsten unverändert bleibt. Sogar Hardys vermeintlich so abstrakte Arbeit zur Zahlentheorie – die Untersuchung der Eigenschaften natürlicher Zahlen – fand unerwartet praktische Anwendung. Im Jahr 1973 gelang dem britischen Mathematiker Clifford Cocks unter Anwendung der Zahlentheorie ein Durchbruch in der Kryptographie – der Entwicklung von Codes und Verschlüsselungen. Cocks Entdeckung machte ein weiteres Statement von Hardy hinfällig. In seinem 1940 erschienenen, berühmt gewordenen Buch *A Mathematician's Apology* («Verteidigungsschrift eines Mathematikers») verkündete Hardy: «Niemand hat bislang einen kriegstauglichen Zweck für die Zahlentheorie aufzutun können.» Ohne Zweifel irrte Hardy auch hier. Codes sind für die militärische Kommunikation absolut unerlässlich. Selbst Hardy also, einer der schärfsten Kritiker der angewandten Mathematik, wurde in die Formulierung nützlicher mathematischer Theorien «hineingezogen» (hätte er noch gelebt, hätte er sich vermutlich mit Händen und Füßen dagegen gewehrt).

Aber das ist lediglich die Spitze des Eisbergs. Kepler und Newton entdeckten, dass die Planeten unseres Sonnensystems sich auf Umlaufbahnen bewegen, die die Form von Ellipsen haben – dieselben Kurven hatte der griechische Mathematiker Menaichmos (etwa 350 v. Chr.) zwei Jahrtausende zuvor bereits beschrieben. Die neue Art von Geometrie, wie sie Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) im Jahr 1854 in einem berühmt gewordenen Habilitationsvortrag dargelegt hat, erwies sich als genau das Instrumentarium, das Einstein brauchte, um die Beschaffenheit des Kosmos zu erklären. Eine mathematische «Sprache» namens Gruppentheorie, von dem jungen Talent Évariste Galois (1811–1832) eigentlich nur zu dem Zweck entwickelt, die Lösbarkeit algebraischer Gleichungen zu untersuchen, ist heute zu einer Sprache geworden, die von Physikern, Ingenieuren, Linguisten und sogar Anthropologen verwendet wird, um die Symmetrien der Welt zu beschreiben. Darüber hinaus hat die Entdeckung mathematischer Symmetriemuster in gewissem Sinne den gesamten wissenschaftlichen Prozess auf den Kopf gestellt. Jahrhunderte hindurch hatte der Weg zum Verständnis kosmischen Wirkens mit dem Sammeln von Fakten begonnen, die aus Experimenten und

1. Ein Mysterium

Beobachtungen stammten. Daraus bemühten sich die Wissenschaftler dann durch Versuch und Irrtum allgemeine Naturgesetze herzuleiten. Der Erkenntnisprozess begann mit Beobachtungen vor Ort, dann wurde Puzzleteilchen um Puzzleteilchen zusammengesetzt. Mit der im 20. Jahrhundert gewonnenen Erkenntnis, dass die Strukturen der subatomaren Welt wohldefinierten mathematischen Korrelationen gehorchen, begannen die modernen Physiker genau den umgekehrten Weg zu gehen. Sie stellten die mathematischen Symmetrieprinzipien an den Anfang unter der Annahme, dass die Naturgesetze und damit auch alle Bausteine von Materie bestimmten Mustern folgen müssten, und leiteten aus dieser Forderung allgemeine Gesetze her. Woher weiß die Natur, dass sie diesen abstrakten mathematischen Symmetrien zu gehorchen hat?

Im Jahr 1975 spielte Mitch Feigenbaum, ein junger mathematischer Physiker am Los Alamos National Laboratory, mit seinem Taschenrechner (Marke HP-65). Er untersuchte das Verhalten einer einfachen Gleichung. Dabei fiel ihm auf, dass sich das Ergebnis einer Rechenfolge, die sich bei seinen Betrachtungen immer wieder ergab, einer bestimmten Zahl mehr und mehr annäherte: 4,669... Zu seinem Erstaunen tauchte, wenn er andere, ähnlich strukturierte Gleichungen untersuchte, exakt diese Zahl wieder auf. Auch wenn er keine Erklärung dafür hatte, zog Feigenbaum daraus prompt den Schluss, dass diese Zahl eine Universalie darstellen müsse, die irgendwie den Übergang von Ordnung zu Chaos beschreibt. Es verwundert nicht, dass die physikalische Forschungsgemeinde darauf zunächst einigermaßen skeptisch reagierte. Warum schließlich sollte ein und dieselbe Zahl das Verhalten von offenkundig höchst unterschiedlichen Systemen beschreiben? Nach sechsmonatiger Begutachtung durch Angehörige der Fachwelt wurde Feigenbaums erster Artikel zu diesem Thema abgelehnt. Nur wenig später hat sich allerdings in Experimenten herausgestellt, dass flüssiges Helium, das von unten erhitzt wird, sich genau in der von Feigenbaums Universalösung vorhergesagten Weise verhält. Und das war nicht das einzige System, das diesem Muster gehorchte. Feigenbaums magische Zahl tauchte bei jedem Übergang vom geordneten Fluss einer Flüssigkeit zur Turbulenz auf, sogar bei Wasser, das aus einem Hahn tropft.

1. Ein Mysterium

Die Liste solcher Gelegenheiten, bei denen Mathematiker die Bedürfnisse künftiger Generationen auf den verschiedensten wissenschaftlichen Disziplinen sozusagen «vorwegnahmen», ließe sich beliebig fortführen. Eines der faszinierendsten Beispiele für das geheimnisvolle und sehr oft völlig unerwartete Wechselspiel zwischen der Mathematik und der realen physikalischen Welt bietet die Geschichte der *Knotentheorie* – der mathematischen Betrachtung von Knoten. Ein mathematischer Knoten ähnelt einem ganz normalen Knoten in einer Schnur, bei der die Schnurenden nahtlos ineinander übergehen. Das heißt, der mathematische Knoten ist eine geschlossene Kurve ohne lose Enden. Seltsamerweise leitete sich der Hauptbeweggrund für die Entwicklung der mathematischen Knotentheorie aus einem inkorrekten Atommodell her, das im 19. Jahrhundert aufgestellt wurde. Nachdem man das Modell – nur zwei Jahrzehnte nachdem es ersonnen worden war – aufgegeben hatte, entwickelte sich die Knotentheorie zu einem relativ orchideenhaften Zweig der reinen Mathematik weiter. Erstaunlicherweise fand dieses abstrakte Unterfangen plötzlich breite Anwendung in der modernen Wissenschaft – auf Gebieten wie der Molekularstruktur von DNA bis hin zur Stringtheorie, dem Versuch, die subatomare Welt mit der Gravitationstheorie zu versöhnen. Ich werde auf diese bemerkenswerte Angelegenheit in Kapitel 8 zurückkommen, denn sie illustriert vielleicht am eindrucklichsten, wie sich aus dem Versuch, die physikalische Realität zu erklären, neue Zweige der Mathematik ergeben können und wie diese sich dann in den abstrakten Sphären der Mathematik zu verlieren scheinen, nur um schließlich völlig unerwartet zu ihren Ursprüngen zurückzukehren.

Entdeckt oder erfunden?

Schon der kurze Abriss, den ich bisher gegeben habe, zeugt in höchst eindrucksvoller Weise von einem Universum, das entweder von Mathematik gelenkt wird oder zumindest der Analyse durch die Mathematik zugänglich ist. Wie dieses Buch zeigen wird, scheint vieles, vielleicht sogar alles, was der Mensch anpackt, einer inneren

mathematischen Choreographie zu gehorchen, sogar dort, wo man es am wenigsten erwartet. Betrachten Sie zum Beispiel eine Gegebenheit aus der Welt der Finanzen – das Black-Scholes-Modell zur Bewertung von Finanzoptionen (1973). Das Black-Scholes-Modell brachte seinen Schöpfern (Myron Scholes und Robert Carhart Merton) den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ein (Fischer Black verstarb, bevor der Preis verliehen wurde). Die Schlüsselgleichung in dem Modell macht es möglich zu verstehen, wie Aktienoptionen zu bewerten sind (Optionen sind Finanzinstrumente, die es dem Bieter ermöglichen, an einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft Aktien zu einem vorher ausgemachten Preis zu erstehen). Hier aber kommt die große Überraschung: Kern dieses Modells ist ein von Physikern bereits seit Jahrzehnten untersuchtes Phänomen – die Brown'sche Molekularbewegung, die Wärmebewegung kleinster Teilchen wie in Wasser treibenden Pollen oder Rauchpartikeln in der Luft. Als sei das noch nicht genug, gilt dieselbe Gleichung auch für ein paar hunderttausend Sterne in Sternenhaufen. Ist das nicht wirklich, um es mit den Worten von *Alice im Wunderland* zu sagen, «merkwürdiger und merkwürdiger»? Was immer der Kosmos schließlich tun mag, Wirtschaft und Finanzen sind definitiv Welten, die vom Menschen ersonnen wurden.

Oder nehmen Sie ein geläufiges Problem, mit dem sich die Hersteller von Microchips und Computerdesigner herumschlagen müssen. Sie verwenden Laserbohrer, um Zehntausende von Löchern in ihre Platinen zu stanzen. Um die Kosten dafür gering zu halten, wollen sie verhindern, dass ihre Bohrer wie «bummelnde Touristen» umherirren. Das Problem besteht folglich darin, die kürzeste «Tour» zwischen den Löchern zu finden, das heißt, jede einzelne Lochposition genau einmal anzusteuern. Zufällig hat sich die Mathematik mit ebendiesem Problem – berühmt geworden unter dem Namen *Problem des Handlungsreisenden* – bereits seit den 1920er Jahren auseinandergesetzt. Im Prinzip geht es darum, dass ein Handlungsreisender oder ein Politiker auf Wahlkampftour in möglichst ökonomischer Weise eine bestimmte Anzahl von Städten erreichen muss, wobei die Kosten der Fahrt zwischen zwei Städten bekannt sind und der Reisende irgendwie die billigste Möglichkeit herausfinden muss, alle Orte anzufahren und zu seinem Ausgangspunkt zurückzukehren. Das Problem des

1. Ein Mysterium

Handlungsreisenden wurde 1954 für 49 Städte in den Vereinigten Staaten gelöst. Im Jahr 2004 wurde eine Lösung für 24 978 Orte in Schweden vorgelegt. Mit anderen Worten: Die Elektronikindustrie, Firmen, die Lastwagen auf die Reise schicken, um Päckchen abholen und ausliefern zu lassen, ja sogar die Hersteller von japanischen Glücksspielautomaten – den Pachinko-Automaten, bei denen Tausende Nägel eingeschlagen werden müssen – verlassen sich bei so simplen Dingen wie dem Bohren, der Erstellung von Zeitplänen oder dem physikalischen Design von Computern auf die Mathematik.

Die Mathematik ist sogar in Gebiete vorgedrungen, die traditionellerweise nicht mit den Naturwissenschaften assoziiert werden. So gibt es beispielsweise ein *Journal of Mathematical Sociology* (im Jahr 2006 immerhin bei Band 30 angelangt), das sich mit der mathematischen Beschreibung komplexer soziologischer Strukturen, Organisationen und sogenannter informeller Gruppen befasst. Die Artikel dieser Zeitschrift behandeln Themen, die von einem mathematischen Modell für die Vorhersage der öffentlichen Meinung bis hin zu Prognosen über die Interaktion in sozialen Gruppierungen reichen.

Den Bogen in diese Richtung – von der Mathematik zu den Geisteswissenschaften – weiter gespannt, kommen wir zum Feld der Computerlinguistik, das ursprünglich allein von Computerspezialisten und Informatikern beackert wurde und nun zu einem interdisziplinären Forschungsgebiet geworden ist, das Linguisten, kognitive Psychologen, Logiker und Experten für künstliche Intelligenz vereint, um den Feinheiten von natürlichen Sprachen auf die Spur zu kommen.

Ist es ein gemeiner Schabernack, der mit uns getrieben wird und dank dessen alles menschliche Ringen um Verstehen und Begreifen letztlich nur dazu führt, dass wir nach und nach immer verzwicktere Ebenen einer Mathematik aufdecken, auf deren Fundament das Universum und wir, seine komplexen Geschöpfe, entstanden sind? Ist die Mathematik, wie die Lehrer gerne sagen, das geheime Lehrbuch – eines, aus dem der Professor lehrt –, während den Studenten eine sehr viel simplere Version an die Hand gegeben wird, damit der Lehrende immer als der Klügere dasteht? Oder, um die biblische Metapher zu verwenden, ist die Mathematik so etwas wie die Frucht der Früchte vom Baum der Erkenntnis?

Entdeckt oder erfunden?

Wie ich zu Beginn des Kapitels kurz angemerkt hatte, wirft die aberwitzige Wirkmächtigkeit der Mathematik viele faszinierende Rätsel auf: Führt also die Mathematik ein Dasein, das vom menschlichen Geist ganz und gar unabhängig ist? Mit anderen Worten: *Entdecken* wir mathematische Wahrheiten nur, so wie Astronomen bis dahin unbekannte Galaxien entdecken? Oder ist die Mathematik nichts weiter als eine menschliche *Erfindung*? Falls die Mathematik tatsächlich in einem fernen Märchenland beheimatet ist, wie sieht dann die Beziehung zwischen dieser mystischen Welt und der physikalischen Realität aus? Wie verschafft sich das menschliche Gehirn mit den ihm eigenen bekannten Einschränkungen Zugang zu einer solch ewigen, unveränderbaren Welt außerhalb von Raum und Zeit? Ist aber andererseits die Mathematik nichts weiter als eine menschliche Erfindung, verfügt sie also nicht über ein unabhängiges Dasein außerhalb unseres Geistes – wie lässt sich dann die Tatsache erklären, dass in so vielen Fällen das Formulieren von mathematischen Wahrheiten auf wunderbare Weise Fragen über den Kosmos und das menschliche Leben vorwegnimmt, die erst viele Jahrhunderte später gestellt werden? Das sind keine trivialen Fragen. Wie wir in diesem Buch wieder und wieder sehen werden, sind sich selbst Mathematiker, Kognitionswissenschaftler und Philosophen unserer Tage über die Antwort nicht einig. Im Jahr 1989 verlieh der französische Mathematiker Alain Connes, Gewinner der beiden prestigeträchtigsten Preise auf dem Gebiet der Mathematik – der Fields-Medaille (1982) und des Crafoord-Preises (2001) –, seiner Sicht der Dinge in deutlichen Worten Ausdruck:

Nehmen Sie zum Beispiel die Primzahlen [solche, die nur durch eins und sich selbst teilbar sind], die, wie ich finde, eine stabilere Wirklichkeit darstellen als die materielle Welt, die uns umgibt. Der Mathematiker bei der Arbeit lässt sich mit einem Forscher vergleichen, der sich aufmacht, die Welt zu erkunden. Man entdeckt grundlegende Tatsachen durch Erfahren. Wenn man zum Beispiel ein paar einfache Rechnungen durchführt, wird einem klar, dass die Reihe der Primzahlen offenbar endlos weitergeht. Aufgabe des Mathematikers ist es somit zu beweisen, dass die Menge an Primzahlen unendlich ist. Dank Euklid ist dies natürlich eine alte Erkenntnis. Eine der interessantesten Konsequenzen aus seinem Beweis ist der Umstand, dass es,

1. Ein Mysterium

sollte jemand eines schönen Tages behaupten, er habe die größte aller Primzahlen entdeckt, sehr leicht sein wird, ihn zu widerlegen. Dasselbe gilt für jeden Beweis. Wir rennen daher gegen eine Wirklichkeit an, die jeden Zoll so unanfechtbar ist wie die physikalische Realität.

Martin Gardner, berühmter Autor zahlreicher Texte zur Freizeitmathematik, rechnet sich ebenfalls zum Lager derjenigen, die die Mathematik als *Entdeckung* betrachten. Für ihn steht außer Frage, dass Zahlen und die Mathematik ihr eigenes Dasein führen, ob die Menschen nun von ihnen wissen oder nicht. Er hat dazu einmal scherzhaft bemerkt: «Wenn zwei Dinosaurier auf einer Lichtung auf zwei andere Dinosaurier treffen, dann sind da vier Dinosaurier, auch wenn ihnen keine Menschen zuschauen, die dies feststellen könnten, und die Bies-ter zu blöde sind, um das zu wissen.» Wie Connes betont, sind die Vertreter des Paradigmas von der Mathematik als Entdeckung (das, wie wir sehen werden, der platonischen Weltsicht verpflichtet ist) der Ansicht, dass wir es, sobald uns ein bestimmtes mathematisches Konzept – sagen wir das der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... – einmal aufgegangen ist, auf der Stelle mit unbestreitbaren Fakten zu tun bekommen – beispielsweise $3^2 + 4^2 = 5^2$, völlig unabhängig davon, was wir von diesen Relationen halten. Das vermittelt, wie er findet, zumindest sehr den Eindruck, als stünden wir in Kontakt mit einer existierenden Realität.

Andere sind da anderer Ansicht. Bei der Rezension eines Buches, in dem Connes seine Ideen darlegte, bemerkte der britische Mathematiker Sir Michael Atiyah (im Jahr 1966 Gewinner der Fields-Medaille und im Jahr 2004 des Abelpreises):

Jeder Mathematiker muss Verständnis für Connes haben. Wir alle haben das Gefühl, dass die ganzen Zahlen oder Kreise tatsächlich in einem abstrakten Sinne existieren und dass die platonische Sicht [die in Kapitel 2 im Einzelnen dargelegt werden soll] etwas äußerst Verführerisches hat. Aber können wir dem wirklich beipflichten? Wäre das Universum eindimensional oder gar diskret, ist schwer zu verstehen, wie sich eine Geometrie hätte entwickeln sollen. Es mag so aussehen, als befänden wir uns mit den ganzen Zahlen auf sichererem Terrain und als sei Zählen wirklich eine urtümliche Form des Erfas-

Entdeckt oder erfunden?

sens. Aber lassen Sie uns einen Augenblick annehmen, Intelligenz hätte ihren Sitz nicht in der Menschheit, sondern in irgendeinem komplett isolierten, solitär lebenden Polypen in den tiefsten Tiefen des Pazifik genommen. Dieses Wesen hätte keinerlei Begegnungen mit einzelnen Gegenständen, sondern nur mit dem Wasser, von dem es umgeben ist. Seine sensorischen Erfahrungen beständen aus Fließgeschwindigkeit, Temperatur und Druck. In einem solchen reinen Kontinuum stellt sich die Frage nach dem Diskreten nicht, und so gäbe es nichts zu zählen.

Atiyah ist daher der Ansicht, dass der «Mensch die Mathematik durch die Idealisierung und das Abstrahieren von Elementen der physikalischen Welt *geschaffen* [Kursivierung von mir] hat». Der Linguist George Lakoff und der Psychologe Rafael Núñez sind derselben Ansicht. In ihrem Buch *Where Mathematics Comes From* («Woher die Mathematik kommt») gelangen sie zu dem Schluss: «Mathematik ist ein natürlicher Bestandteil unseres Menschseins. Sie entspringt unserem Körper, unserem Gehirn und unseren Alltagserfahrungen in der Welt.»

Der Standpunkt von Atiyah, Lakoff und Núñez wirft eine andere interessante Frage auf. Wenn die Mathematik wirklich eine durch und durch menschliche Erfindung ist, kann sie dann wahrhaft universal sein? Mit anderen Worten: Wenn es intelligente außerirdische Lebensformen gibt, würden diese dann dieselbe Mathematik erfinden? Carl Sagan (1934–1996) war davon überzeugt, dass die Antwort auf die letzte Frage Ja lauten müsste. In seinem Buch *Unser Kosmos* schreibt er bei der Diskussion der Frage, was für eine Art von Signalen eine intelligente Zivilisation ins All senden würde: «Es ist höchst unwahrscheinlich, daß bei einem natürlichen physikalischen Prozeß ausschließlich Primzahlen enthaltende Radiobotschaften ausgestrahlt werden sollten. Erhielten wir eine solche Botschaft, könnten wir daraus auf eine Zivilisation im All schließen, die zumindest eine gewisse Vorliebe für Primzahlen hegt.» Wie sicher aber ist das? In seinem 2002 erschienenen Buch *A New Kind of Science* («Eine neue Art von Wissenschaft») vertritt der Mathematiker und Physiker Stephen Wolfram den Standpunkt, dass das, was wir als «unsere Mathematik» bezeichnen, durchaus nur eine Variante aus einer reichen Vielfalt an mathematischen «Geschmacksrichtungen» sein könnte. So könnten wir zum Beispiel, statt

1. Ein Mysterium

die Natur mit Gesetzen zu beschreiben, die auf mathematischen Gleichungen basieren, ganz andere Gesetzmäßigkeiten heranziehen, denkbar wären solche, wie sie durch einfache Computerprogramme verkörpert werden. Darüber hinaus haben einige Kosmologen vor kurzem sogar die Möglichkeit erörtert, dass unser Universum nur ein kleines Rädchen in einem *Multiversum* – einer riesigen Menge von Universen – sein könnte. Sollte eine solche Vielfalt tatsächlich existieren – würden wir dann wirklich erwarten, dass in anderen Universen dieselbe Mathematik gälte wie in dem unseren?

Molekularbiologen und Kognitionswissenschaftler bringen noch einen anderen Gesichtspunkt in die Diskussion, der sich auf die Untersuchung der Beschaffenheit unseres Gehirns gründet. Für einige dieser Forscher unterscheidet sich die Mathematik nicht allzu sehr von Sprache. Anders ausgedrückt: In diesem «kognitiven» Szenario hat sich im Laufe von Äonen, in denen Menschen zwei Hände, zwei Augen und zwei Brüste vor Augen hatten, eine abstrakte Definition der Zahl 2 herauskristallisiert, ziemlich genau so, wie das Wort «Vogel» irgendwann begonnen hat, für eine ganze Reihe von zweiflügligen, des Fliegens mächtigen Wesen zu stehen. Mit den Worten des französischen Neurowissenschaftlers Jean-Pierre Changeux: «Für mich ist die axiomatische Methode der klare Ausdruck von zerebralen Funktionen und von auf dem Gebrauch der Sprache beruhenden kognitiven Fähigkeiten des Menschen.» Wenn die Mathematik jedoch nichts weiter ist als eine weitere Sprache, wie lässt sich dann die Tatsache erklären, dass Kinder zwar Sprachen problemlos erlernen, in vielen Fällen aber nur schwer mit der Mathematik zurande kommen? Das schottische Wunderkind Marjory Fleming (1803–1811) beschrieb auf höchst charmante Weise die Schwierigkeiten, die ein Schüler mit der Mathematik haben kann. Dieses junge Mädchen, das seinen neunten Geburtstag nicht mehr erleben sollte, hinterließ Tagebücher, die mehr als neuntausend Worte Prosa und fünfhundert gereimte Verszeilen umfassen. An einer Stelle klagt sie: «Ich muss euch nun von der schrecklichen und erbärmlichen Plackerei berichten, die das Einmaleins für mich bedeutet, ihr könnt es euch nicht vorstellen. Das Teuflischste ist 7 mal 7 und 8 mal 8, die Natur selbst hält so etwas nicht aus.»

Einige der verzwickten Fragen, die ich Ihnen vorgestellt habe,

lassen sich auch in anderer Form stellen: Gibt es irgendwelche grundlegenden Unterschiede zwischen der Mathematik und anderen Ausdrucksweisen des menschlichen Geistes wie der bildenden Kunst und der Musik? Falls nein, warum weist die Mathematik dann eine derart imposante Kohärenz und Schlüssigkeit auf, wie sie sich bei keiner anderen menschlichen Schöpfung zeigen? Euklids Geometrie zum Beispiel ist (da, wo sie gilt) heute noch genauso zutreffend wie im Jahr 300 v. Chr. Sie repräsentiert «Wahrheiten», die sich uns förmlich aufdrängen. Der Musik des antiken Griechenlands zu lauschen oder an den naiven Vorstellungen eines Aristoteles festzuhalten, sehen wir uns hingegen weit weniger veranlasst.

Nur sehr wenige wissenschaftliche Fächer berufen sich heutzutage noch auf Ideen, die bis zu dreitausend Jahre alt sind. Die jüngste Forschung auf mathematischem Gebiet kann sich genauso gut auf Theoreme berufen, die wir im vergangenen Jahr oder letzte Woche publiziert haben, wie auf eine Formel zur Beschreibung der Kugeloberfläche, die Aristoteles um 250 v. Chr. bewiesen hat! Das Atommodell des 19. Jahrhunderts hat kaum zwei Jahrzehnte überlebt, weil neue Erkenntnisse bewiesen haben, dass Teile der Theorie auf Irrtümern fußten. So und nicht anders schreitet Wissenschaft fort. Newton würdigte (oder auch nicht! Siehe Kapitel 4) in Zusammenhang mit seinem großen Weitblick die Riesen, auf deren Schultern er gestanden hat. Er hätte sich auch bei den Riesen entschuldigen können, weil er deren Arbeit obsolet machte.

In der Mathematik laufen die Dinge nicht nach diesem Muster. Auch wenn sich der zum Beweis gewisser Sachverhalte notwendige Formalismus geändert haben mag, so hat sich die Mathematik selbst doch nicht verändert. Ja, wie der Mathematiker und Autor Ian Stewart es einmal ausgedrückt hat: «In der Mathematik gibt es ein Wort für länger zurückliegende Ergebnisse, die später verändert wurden – man nennt sie schlicht und einfach *Fehler*.» Anders als in anderen Wissenschaften werden Fehler in der Mathematik nicht deshalb als Fehler bezeichnet, weil sich neue Befunde ergeben haben, sondern aufgrund einer sorgfältigeren und schlüssigeren Auseinandersetzung mit denselben alten mathematischen Weisheiten. Macht das die Mathematik tatsächlich zu Gottes ureigener Sprache?

1. Ein Mysterium

Wenn Sie glauben, es sei nicht so wichtig zu verstehen, ob die Mathematik erfunden oder entdeckt wird, dann überlegen Sie einmal, wie ideologisch befrachtet die Unterscheidung in Erfindung und Entdeckung bei einer anderen Frage ist: Ist Gott eine Entdeckung oder eine Erfindung? Oder, noch provokanter: Hat Gott den Menschen nach seinem Bilde geschaffen? Oder haben die Menschen sich einen Gott nach ihrem Bild geschaffen?

Ich will in diesem Buch versuchen, viele dieser spannenden Fragen (und noch eine ganze Reihe mehr) und die dazugehörigen nicht minder spannenden Antworten anzupacken. In diesem Prozess werden Erkenntnisse zur Sprache kommen, die die größten Mathematiker, Physiker, Philosophen, Kognitionswissenschaftler und Linguisten vergangener Jahrhunderte und unserer Zeit gewonnen haben. Auch will ich die Meinungen, Mahnungen und Vorbehalte vieler moderner Denker würdigen. Wir beginnen diese spannende Reise mit den bahnbrechenden Gedanken einiger der frühesten Philosophen.

Kapitel 2

Mystiker: Der Numerologe und der Philosoph

Menschen waren stets von dem Wunsch beseelt, den Kosmos zu verstehen. Ihr Streben, dem auf den Grund zu gehen, «was das alles zu bedeuten hat», überstieg um Längen alles, was sie zum bloßen Überleben, der Verbesserung ihrer ökonomischen Situation oder ihrer Lebensqualität leisten mussten. Das heißt nun nicht, dass sich jedermann ständig mit der Suche nach irgendeiner natürlichen oder metaphysischen Ordnung befasst hätte. Leute, die alle Hände voll zu tun haben, ihren Lebensunterhalt zu sichern, können sich nur selten den Luxus leisten, über den Sinn des Lebens nachzugrübeln. In der Galerie derer aber, die nach Gesetzmäßigkeiten und Mustern gefahndet haben, mit denen sich die offenkundige Komplexität des Universums würde erklären lassen, gab es einige wenige, die turmhoch über den Rest der Menschheit hinausragten.

Für viele ist der Name des französischen Mathematikers, Wissenschaftlers und Philosophen René Descartes (1596–1650) gleichbedeutend mit dem Anbruch der Moderne auf dem Gebiet der Philosophie. Descartes war einer der Hauptarchitekten der Verlagerung von einer bloßen Beschreibung der natürlichen Welt in all ihren Eigenschaften, wie wir sie mit unseren Sinnen unmittelbar wahrnehmen, hin zu Erklärungen, die sich durch mathematisch wohldefinierte Quantitäten ausdrücken lassen. Statt sich darauf zu beschränken, vage charakterisierte Gefühle, Gerüche, Farben und Empfindungen zu Protokoll zu geben, war Descartes darauf aus, mit seinen wissenschaftlichen Erklärungen bis hinunter auf die unterste Mikroebene vorzudringen, und er bediente sich dabei der Sprache der Mathematik:

2. Mystiker: Der Numerologe und der Philosoph

Denn völlig frei bekenne ich, daß ich keine andere Materie der körperlichen Dinge zugestehe, als jene in jeder Weise teilbare, formbare und bewegliche, die die Geometer Quantität nennen und die sie als Gegenstand ihren Beweisen zugrunde legen ... Und weil auf diese Weise alle Naturphänomene erklärt werden können, wie im Folgenden deutlich werden wird, glaube ich, daß keine anderen Prinzipien der Physik zugestanden werden dürfen und auch keine anderen zu wünschen sind.

Interessanterweise klammerte Descartes aus seiner großen wissenschaftlichen Vision die Bereiche «Denken und Geist» aus, weil er sie als unabhängig von der mathematisch erklärbaren Welt der Materie erachtete. Obschon kein Zweifel daran besteht, dass Descartes einer der einflussreichsten Denker der vergangenen vier Jahrhunderte gewesen ist (ich werde in Kapitel 4 auf ihn zurückkommen), so war er doch nicht der Erste, der die Mathematik auf eine zentrale Position erhoben hat. Ob Sie es glauben oder nicht, die radikale Vorstellung von einem von mathematischen Prinzipien durchdrungenen und gesteuerten Kosmos – eine Vorstellung, die in gewissem Sinne sogar weiter ging als die von Descartes – war erstmals (wenn auch mit stark mystischem Beigeschmack) über zweitausend Jahre zuvor geäußert worden. Die Person, der die Legende die Aussage zuschreibt, die menschliche Seele empfinde Musik, wenn sie sich mit der reinen Mathematik befasse, war der große, geheimnisumwitterte Pythagoras.

Pythagoras

Pythagoras (ca. 572–497 v. Chr.) war womöglich der erste Mensch, der beides war – einflussreicher Naturphilosoph und charismatischer spiritueller Philosoph zugleich, Wissenschaftler und religiöser Denker. Ja, er gilt als derjenige, der die Begriffe «Philosophie» – wörtlich: die Liebe zur Weisheit – und «Mathematik» – die Kunst des Lernens – eingeführt hat. Auch wenn keine der Schriften des Pythagoras erhalten geblieben ist (wenn es sie denn je gegeben hat, vieles wurde seinerzeit mündlich weitergegeben), verfügen wir über drei sehr ausführliche, wenngleich nur teilweise verlässliche Biographien seiner Person aus

Pythagoras

dem 3. Jahrhundert. Eine vierte, anonyme, ist in den Schriften des byzantinischen Patriarchen und Philosophen Photius (ca. 820–891) erhalten. Das Hauptproblem bei dem Versuch, Pythagoras' persönlichen Beitrag einzuschätzen, liegt darin, dass seine Anhänger und Schüler – die Pythagoreer – all ihre Ideen unweigerlich ihm zuschrieben. Infolgedessen fand sogar Aristoteles (384–322 v. Chr.) es schwierig zu sagen, welcher Teil der pythagoreischen Philosophie einigermaßen sicher Pythagoras selbst zugeschrieben werden kann, und so nimmt er in der Regel eher allgemein Bezug auf «die Pythagoreer» oder die «sogenannten Pythagoreer». Dessen ungeachtet wird in Anbetracht des großen Ruhmes des Pythagoras in der nachfolgenden Tradition gemeinhin davon ausgegangen, dass er der Urheber zumindest einiger der pythagoreischen Theorien gewesen sein muss, denen sich Platon und sogar Kopernikus so verpflichtet gefühlt haben.

Es bestehen kaum Zweifel, dass Pythagoras zu Beginn des 6. Jahrhunderts v. Chr. auf der Insel Samos, unmittelbar vor der Küste der heutigen Türkei, geboren wurde. Er war möglicherweise bereits in jungen Jahren weit gereist, vor allem nach Ägypten und vielleicht auch nach Babylon, wo ihm zumindest ein Teil seiner mathematischen Bildung zuteilgeworden sein dürfte. Schlussendlich emigrierte er in eine kleine griechische Kolonie in Kroton (heute Crotone) unweit der Südspitze Italiens, wo sich rasch eine höchst motivierte Gruppe von Schülern und Anhängern um ihn versammelte.

Der griechische Geschichtsschreiber Herodot (ca. 485–425 v. Chr.) bezeichnet Pythagoras als den «vortrefflichsten Philosophen unter den Griechen», und der vorsokratische Dichter und Philosoph Empedokles (ca. 492–432 v. Chr.) fügte voll Bewunderung hinzu: «Doch es lebte unter jenen ein Mann von übermenschlichem Wissen, der anerkannt den größten Geistesreichtum besaß und mannigfacher Künste mächtig war. Denn sobald er nur mit allen seinen Geisteskräften sich reckte, schaute er leicht in seinen zehn und zwanzig Menschenleben jedes einzelne Ding in der ganzen Welt.»

Doch nicht alle waren in gleicher Weise beeindruckt. In Kommentaren, in denen möglicherweise eine gewisse persönliche Rivalität durchscheint, attestiert der Philosoph Heraklit von Ephesos (ca. 535–475 v. Chr.) Pythagoras zwar ein ungemein breites Wissen, fügt aber

2. Mystiker: Der Numerologe und der Philosoph

gleich darauf verächtlich hinzu: «Viel Lernen lehrt noch keine Weisheit, anderenfalls hätte es Hesiod [einen griechischen Dichter, der um 700 v. Chr. gelebt hat] und Pythagoras weise gemacht.»

Pythagoras und die frühen Pythagoreer waren weder Mathematiker noch Wissenschaftler im strengen Sinne. Kern ihrer Lehren war vielmehr eine metaphysische Philosophie der Zahlen und ihrer Bedeutung. Für die Pythagoreer waren Zahlen lebendige Entitäten und universell gültige Prinzipien zugleich, die von den himmlischen Sphären bis zur menschlichen Ethik alles durchdrangen. Mit anderen Worten: Zahlen wurden zwei verschiedene, einander ergänzende Aspekte zugeschrieben. Auf der einen Seite verfügten sie über eine greifbare physische Existenz, auf der anderen waren sie abstrakte Konzepte, auf die sich alles andere gründete. Die Zahl 1 zum Beispiel – die *Monas* – wurde zum einen als Grundlage für alle anderen Zahlen betrachtet, als Entität, so real wie Wasser, Luft und Feuer, die an der Struktur der physikalischen Welt teilhatte, zum anderen als Idee – die metaphysische Einheit im Ursprung aller Schöpfung. Der englische Gelehrte der Philosophiegeschichte Thomas Stanley (1625–1678) beschrieb die beiden Bedeutungen, die die Pythagoreer Zahlen beimaßen, in wunderbarer Weise (wenn auch im Englisch des 17. Jahrhunderts):

Die Zahl ist zwiefach in ihrem Wesen, geistig (oder nichtmateriell) und wissenschaftlich. Das Geistige ist das ewige Wesen der Zahl, welches Pythagoras in seinen Ausführungen über die Götter als *das glücklichste Prinzip des Himmels und der Erde sowie der Natur zwischen beiden* erkannte ... es ist das, was man *das Prinzip, den Urquell und die Wurzel aller Dinge* nennt ... Wissenschaftlich an der Zahl ist das, was Pythagoras *die Ausdehnung und das Hervorbringen jener fruchtbaren Beweggründe* nennt, *die der Monas oder deren viele eigen sind*.

Zahlen wurden demnach nicht einfach nur als Mittel gesehen, um die Menge oder Anzahl von irgendetwas zu notieren, vielmehr galt es, sie zu entdecken, und man betrachtete sie als formende Prinzipien, die in der Natur wirkten. Alles im Universum – angefangen von materiellen Gegenständen wie der Erde bis hin zu abstrakten Konzepten wie Gerechtigkeit – war durch und durch Zahl.

Pythagoras

Die Tatsache, dass jemand Zahlen aus sich heraus faszinierend findet, ist vielleicht nicht ganz so überraschend. Schließlich haben selbst die gewöhnlichen Zahlen, mit denen wir es im täglichen Leben zu tun haben, ein paar höchst interessante Eigenschaften. Betrachten Sie einmal die Anzahl der Tage in einem Jahr – 365. Sie können leicht nachprüfen, dass 365 die Summe aus drei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist: $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$. Aber das ist noch nicht alles, 365 ist auch die Summe der beiden nächsten Quadratzahlen ($365 = 13^2 + 14^2$)! Oder betrachten Sie die Tage des mittleren Mondmonats: 28. Diese Zahl ist die Summe all ihrer Divisoren oder Teiler (der Zahlen, durch die sie ohne Rest teilbar ist): $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Zahlen mit dieser besonderen Eigenschaft werden als *vollkommene* oder *perfekte Zahlen* bezeichnet (die ersten vollkommenen Zahlen sind 6, 28, 496, 8218). Man beachte auch, dass 28 die Summe der dritten Potenz der beiden ersten ungeraden Zahlen ist: $28 = 1^3 + 3^3$. Selbst eine Zahl, die in unserem Dezimalsystem so weidlich zur Anwendung gelangt wie die 100, hat ihre eigenen Besonderheiten: $100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

Also gut, Zahlen können eine gewisse Faszination ausüben. Dennoch mag man sich fragen, wo die pythagoreische Zahlenverliebtheit ihren Ursprung hat. Woher kam die Vorstellung, dass nicht nur alle Dinge durch eine Zahl beschreibbar, sondern dass alle Dinge Zahl *sind*? Da Pythagoras darüber nichts geschrieben hat oder seine Schriften verloren gegangen sind, ist es nicht leicht, diese Frage zu beantworten. Was von Pythagoras' Argumentation überliefert ist, basiert auf einer Handvoll vorplatonischer Fragmente und auf von Philosophen – vorwiegend Platonikern und Aristotelikern – sehr viel später geführten (und somit nicht allzu verlässlichen) Diskussionen. Das Bild, das sich aus dem Zusammenfügen der einzelnen Indizien ergibt, lässt vermuten, dass die Erklärung für die Zahlenversessenheit der Pythagoreer sich aus zwei Beschäftigungen herleiten könnte, die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben: aus musikalischen Experimenten und aus der Beobachtung des Himmels.

Wenn wir verstehen wollen, wie jene geheimnisvollen Bande zwischen Zahlen, den Sternen und der Musik haben Gestalt annehmen können, müssen wir mit der interessanten Tatsache beginnen, dass die Pythagoreer eine Methode hatten, Zahlen mit Hilfe von Kie-



2. Mystiker: Der Numerologe und der Philosoph



Abbildung 1

seln oder Punkten *bildlich* darzustellen. So stellten sie beispielsweise die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... als Dreiecksformationen von Steinen dar (siehe dazu Abbildung 1). Das Dreieck, das sich auf einer Grundlinie aus vier Steinen konstruieren lässt (und aus insgesamt zehn Steinen besteht), trug den Namen *Tetraktys* (was so viel bedeutet wie vierfach oder «Vierheit») und wurde von den Pythagoreern als Sinnbild der Vollkommenheit betrachtet. Diese Tatsache fand Eingang in eine Anekdote des griechischen Satirikers Lucian (ca. 120–180 n. Chr.): Pythagoras bittet jemanden zu zählen. Als der Mann «1, 2, 3, 4» zählt, unterbricht ihn Pythagoras mit den Worten «Sieh doch! Was du für vier hältst, ist in Wirklichkeit 10, vollkommenes Dreieck und unser Schwur.» Der neoplatonische Philosoph Iamblichos (ca. 250–325 n. Chr.) berichtet uns, dass die Pythagoreer folgende Eidesformel verwendeten, wenn sie einen Schwur taten:

Bei ihm, der die Heilige Vier gab unsrem Geschlechte,
Quell der Wurzelkräfte des immerströmenden Werdens

Warum war die Tetraktys so hoch geschätzt? Weil sie in den Augen der Pythagoreer des 6. Jahrhunderts die gesamte Natur des Universums einzufangen schien. In der Geometrie – dem Ausgangspunkt für die epochale Revolution griechischen Denkens – repräsentierte die Zahl 1 einen Punkt •, 2 eine Linie —••, 3 eine Fläche  und 4 einen dreidimensionalen Tetraeder . Die Tetraktys umfasste demnach alle wahrgenommenen Dimensionen des Raumes.

Das aber war nur der Anfang. Die Tetraktys hatte sogar bei der wissenschaftlichen Betrachtung von Musik ihren Auftritt. Pythagoras

Pythagoras

und den Pythagoreern wird allgemein die Entdeckung zugeschrieben, dass die Unterteilung einer Saite in aufeinanderfolgende ganzzahlige Verhältnisse harmonische und konsonante Intervalle hervorbringt – etwas, das man bei jeder Aufführung eines Streichquartetts zu hören bekommt. Wenn zwei ähnlich gespannte Saiten gleichzeitig gezupft werden, ergibt sich immer dann ein angenehmer Klang, wenn die Längen der Saiten in einfachem ganzzahligem Verhältnis zueinander stehen. Saiten gleicher Länge klingen zum Beispiel unisono, ein Verhältnis von 1:2 lässt eine Oktave erklingen, 2:3 ergibt die reine Quinte, 3:4 die reine Quarte. So wurde die Tetraktys nicht nur der Vollkommenheit ihrer räumlichen Eigenschaften halber geschätzt, sondern auch als Repräsentation jener mathematischen Verhältnisse, die der Harmonie der musikalischen Tonsprache zugrunde liegen. Diese augenscheinlich so magische Vereinigung von Raum und Musik war für die Pythagoreer ein machtvolleres Sinnbild und das Fundament für ihren Glauben an die Harmonie des Alls.

Und wie passte der Himmel zu alledem? Pythagoras und die Pythagoreer hatten auch zur Astronomie etwas zu sagen – ihre Rolle mag nicht von entscheidender Bedeutung gewesen sein, zu vernachlässigen ist sie jedoch auch nicht. Immerhin gehörten sie zu den Ersten, die befanden, dass die Erde eine Kugel sein müsse (vermutlich aufgrund der vermeintlichen mathematisch-ästhetischen Überlegenheit der Kugel). Sie waren außerdem vermutlich die Ersten, die feststellten, dass die Planeten, Sonne und Mond jeder für sich eine eigene unabhängige West-Ost-Bewegung vollführen, in einer Richtung, hieß das, die der täglichen (Schein-)Rotation der Sphäre der Fixsterne entgegengesetzt war. Diesen leidenschaftlichen Beobachtern des mitternächtlichen Himmels konnten selbstredend auch die auffälligsten Eigenschaften der einzelnen Sternbilder dort oben nicht entgangen sein – Gestalt und Anzahl. Jedes Sternzeichen ist erkennbar an der Zahl der Sterne, aus denen es besteht, und an der geometrischen Anordnung, der die Sterne darin gehorchen. Diese beiden Merkmale aber trafen genau ins Mark der pythagoreischen Zahlenlehre, wie die Tetraktys beispielhaft zeigt. Die Pythagoreer waren derart entzückt von den vielfältigen Beziehungen zwischen geometrischen Figuren, Sternkonstellationen, musikalischen Harmonien und Zahlen, dass

2. Mystiker: Der Numerologe und der Philosoph

Zahlen für sie einerseits den Stoff bildeten, aus dem das Universum und alles Seiende bestand, andererseits aber auch die Prinzipien (Bestimmtheiten und Zustände) definierten, die das Seiende lenken. Zahlen und Proportion galten ihnen als das «Erste, deren Natur sich durch alle Dinge hindurchzieht». Kein Wunder also, dass Pythagoras' Maxime lautete: «Alles ist Zahl.»

Aus zwei Aussagen von Aristoteles geht hervor, wie ernst die Pythagoreer diese Maxime nahmen. In seiner *Metaphysik* erklärt Aristoteles an einer Stelle: «Zu dieser Zeit, aber auch schon vorher, beschäftigten sich die sogenannten Pythagoreer als Erste mit der Mathematik, bauten sie weiter aus und waren, da sie sich mit ihr sehr auseinandergesetzt hatten, der Meinung, daß in ihren Prinzipien die Prinzipien der Dinge gelegen seien.» An anderer Stelle beschreibt Aristoteles anschaulich die Verehrung von Zahlen und die besondere Rolle der Tetraktys: «Wie Eurytos [ein Schüler des Pythagoreers Philolaos] festlegte, welches die Zahl von etwas sei, wie etwa dies die Zahl des Menschen und jenes die Zahl des Pferdes, wobei er wie diejenigen, die die Zahlen auf dreieckige und viereckige Figuren zurückführen, ebenso mit Steinchen die Gestalt von Lebenden nachbildete.» «Dreieckige und viereckige Figuren» – beides trifft auf die Tetraktys zu, dazu auf eine weitere faszinierende pythagoreische Konstruktion – das Winkelmaß (ein rechter Winkel oder Gnomon).

Das Wort «Gnomon» («Zeiger») leitet sich von einem babylonischen Gerät zur Zeitmessung her, das wie eine Sonnenuhr funktioniert. Dieser Apparat wurde offenbar von Pythagoras' Lehrer – dem Naturphilosophen Anaximander (ca. 611–547 v. Chr.) – in Griechenland eingeführt, und es besteht kein Zweifel, dass der Schüler hinsichtlich der Geometrie und ihrer Anwendung in der *Kosmologie* – dem Studium des Universums in seiner Gesamtheit – von den Vorstellungen seines Lehrers beeinflusst worden ist. Später wurde der Begriff «Gnomon» für ein Instrument verwendet, mit dem sich – ähnlich wie mit einem Zimmermannswinkel – rechte Winkel auftragen ließen, und auch für die rechtwinklige Ergänzung, die aus einem Quadrat ein größeres Quadrat macht (siehe Abbildung 2): Wenn Sie zu einem Quadrat aus 3×3 Steinchen sieben Steinchen addieren, die in einem rechten Winkel (einem Gnomon) zu einer Reihe angeordnet sind, erhalten Sie ein Quadrat aus

Pythagoras

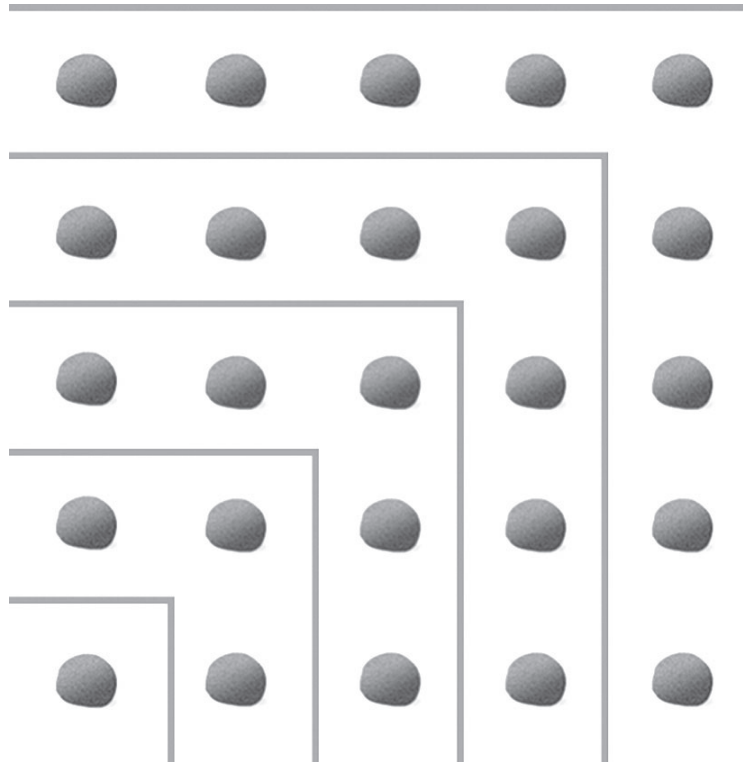


Abbildung 2

sechzehn (4×4) Steinchen. Es handelt sich dabei um die figurierte Darstellung der folgenden Gegebenheit: In der Folge der ungeraden ganzen Zahlen $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ ergibt die Summe aus zwei aufeinanderfolgenden Elementen (von 1 ausgehend) stets eine Quadratzahl. Zum Beispiel: $1 = 1^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ und so weiter. Die Pythagoreer betrachteten diese enge Beziehung zwischen dem Gnomon und dem Quadrat, an das es «sich anschmiegt», als ein Symbol für das Wissen im Allgemeinen: Auch der Wissende sucht die intime Nähe zum Wissen. Die Macht der Zahl schien daher nicht beschränkt auf eine Beschreibung der physikalischen Welt, sondern bildete auch die Grundlage mentaler und emotionaler Prozesse.

Auf die mit dem Gnomon assoziierten Quadratzahlen gründet sich vermutlich auch der berühmte *Satz des Pythagoras*. Dieses gefeierte Stück Mathematik besagt, dass ein Quadrat, das man über der Grundseite oder Hypotenuse eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks zeichnet, in seiner Fläche gleich der Summe der Fläche der

2. Mystiker: Der Numerologe und der Philosoph

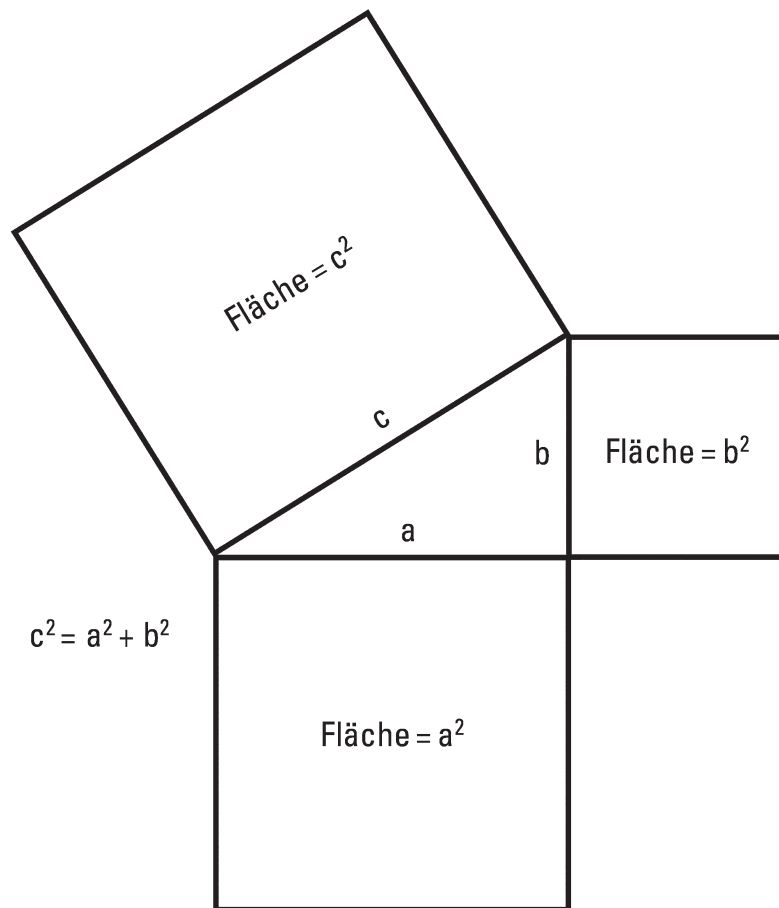


Abbildung 3

Quadrate über den beiden kürzeren Seiten oder Katheten ist (siehe dazu Abbildung 3). Die Entdeckung dieses Satzes wird recht hübsch nachempfunden in dem berühmten Frank-and-Ernest-Cartoon aus Abbildung 4. Wie der Gnomon in Abbildung 2 zeigt, ergibt sich durch das Hinzufügen einer Quadratzahl in Gestalt eines Gnomons – hier: $9 = 3^2$ – zu einem Quadrat der Größe 4×4 ein neues Quadrat der Größe 5×5 : $3^2 + 4^2 = 5^2$. Die Zahlen 3, 4, 5 können demnach die Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck repräsentieren. Ganze Zahlen, die diese Eigenschaft haben (als da zum Beispiel wären: 5, 12, 13, denn $5^2 + 12^2 = 13^2$), nennt man «Pythagoreische Zahlentripel».

Wenige mathematische Sätze genießen denselben Bekanntheitsgrad wie der Satz des Pythagoras. Als die Republik Nicaragua im Jahr 1971 «die zehn mathematischen Gleichungen, die das Antlitz der Erde

FRANK AND ERNEST®

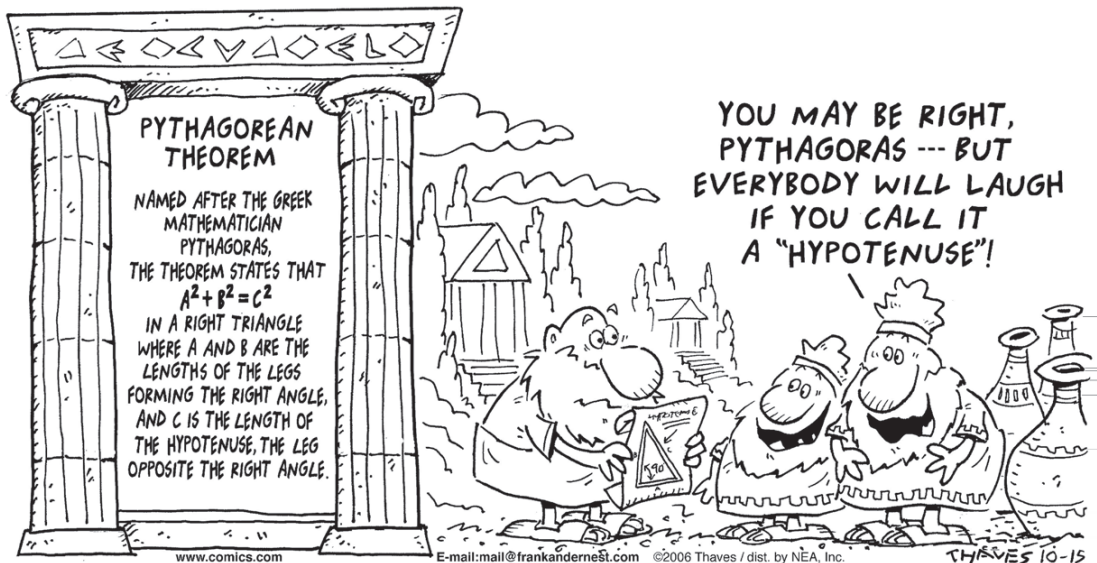


Abbildung 4

SATZ DES PYTHAGORAS: Benannt nach dem griechischen Mathematiker Pythagoras, besagt dieser Satz, dass in einem rechtwinkligen Dreieck, in dem a und b die Schenkel des rechten Winkels bilden und c die Länge der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Hypotenuse ist, gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.

«Du magst ja recht haben, Pythagoras ... Aber jeder lacht dich aus, wenn du das Ding <Hypotenuse> nennst.»

verändert haben», als Motto für eine Briefmarkenserie wählte, zierte der Satz des Pythagoras die zweite Marke der Reihe (die erste zeigte « $1 + 1 = 2$ ») (Abbildung 5).

Mehr Informationen zu diesem und vielen weiteren Büchern aus dem Verlag C.H.Beck finden Sie unter: www.chbeck.de